Cvičení MAI 2

1.) Je dána funkce $f(x,y) = \ln(y - x^2)$.

Najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost a diferencovatelnost v def. oboru; rozhodněte, zda v bodě $[1,2,0]$ grafu fce f lze sestrojit tečnou rovinu (pokud ano, najděte rovnici této roviny). Pomocí lineární aproximace spočtěte přibližně $\ln(1{,}99 - (1{,}02)^2)$.

2.) Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

3.) Je možné následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

a) $f(x,y) = (x+y)^2 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

b) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2x}$

d) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{x+y}$

4.) Spočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu následujících funkcí (všude, kde existují), ukažte, že smíšené derivace 2. řádu jsou záměnné:

(i) $f(x,y)$: $x\sqrt{y}+\frac{y}{x}$; e^{x^2-y}; x^y; $\ln(xy-1)$;
$\sqrt{\ln(xy)}$; $e^{-\frac{x}{y}}$; $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$;

(ii) $f(x,y,z)$: $x^{\frac{y}{z}}$; x^{y^z}; e^{xyz}; $xy+yz+xz$;

5.) Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $X_0\in R^n$, a nechť vektor $\vec{a}\in R^n$ má velikost $|\vec{a}|=1$.
Spočítejte $\frac{d}{dt}\left(f(X_0+t\vec{a})\right)$ v bodě $t=0$.

($\frac{d}{dt}\left(f(X_0+t\vec{a})\right)$ pro $t=0$ se nazývá derivace funkce f v bodě X_0 ve směru vektoru $\vec{a}$)

6.) Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y)=\ln(x+y)$ v bodě $(1,2)$, ležícím na parabole $y^2=4x$ ve směru jednotkového vektoru tečny k parabole v tomto bodě.

7.) Buď f diferencovatelná funkce v bodě $X_0\in R^n$. Ukažte, že vektor $\operatorname{grad} f(X_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\right)$ udává směr nejrychlejšího růstu funkce f v bodě X_0.

8) Ukažte, že funkce f, která je diferencovatelná v bodě $X_0\in R^n$, je v bodě X_0 spojitá.

9) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$ (i když je zde spojitá a má obě parciální derivace v bodě $(0,0)$).